Vektoroptimalisering — En metode for optimal utnyttelse av vannet i vassdrag?

Av Arne J. Carlsen

Arne J. Carlsen er siv.ing. fra NTH 1969 og overingeniør i Norges Vassdrags- og Elektrisitetsvesen.

1. INNLEDNING

Med vektoroptimalisering menes her optimalisering av problemer hvor det er flere mål som kan stå i konflikt til hverandre.

Etterhvert som våre vassdrag er blitt mer og mer utnyttet til forskjellige formål, er motsetningene mellom de enkelte brukerne blitt mer fremtredende.

På grunn av denne sterke utnyttelsen av en del vassdrag, får ikke lenger alle tilfredsstilt sine ønsker. Dette innebærer at det må foretas en prioritering mellom de enkeltes krav. Det er da naturlig å spørre seg *hvordan* en slik prioritering skal gjøres og av *hvem*.

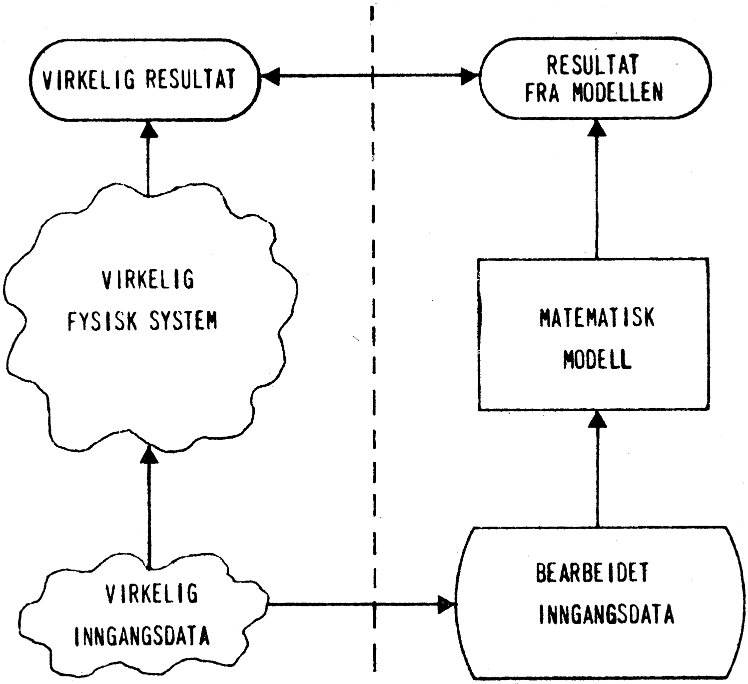
2. FORKLARING AV EN DEL BEGREPER

Matematisk modell

I denne sammenheng mener vi at en modell er en beskrivelse av vår oppfatning av virkeligheten ved hjelp av en eller flere matematiske ligninger.

Det virkelige system som vi skal analysere, er ofte så komplisert, at vi på en eller annen måte må gjøre forenklinger. En ofte tidkrevende og vanskelig oppgave blir da å komme frem til de matematiske ligningene som gir en «best mulig» beskrivelse av virkeligheten. Man må her være oppmerksom på at det ligningssystem man setter opp skal kunne løses på en hensiktsmessig måte. Det matematisk beste er derfor ofte ikke den løsning man velger i praksis. For å få en optimal utnyttelse av systemet, må de matematiske ligninger optimaliseres. Den regnetid som medgår til dette er sterkt avhengig av kompleksiteten av ligningssystemet. For å illustrere det som er skrevet ovenfor medtas fig. 1.

Det som kalles «virkelig resultat» er det som vi kan observere fra det fysiske system. Dette sammenlignes med det beregnede resultat fra modellen. Dersom avviket er tilfredsstillende, beholdes modellen og optimaliseringen kan starte. Er imidlertid dette ikke tilfelle, prøver man å forbedre den matematiske modellen. Dette kalles gjerne uttesting eller kalibrering av modellen, og slik uttesting er meget viktig.



Figur 1.

Optimalisering

Optimaliseringen består i å kvantifisere et gitt sett beslutningsvariable som gir det beste utbyttet av systemet. Dersom utbyttet kan måles i kroner alene, er det naturlig at dette ønskes størst mulig.

Er imidlertid systemet mer komplisert slik at det er naturlig å regne med «verdier» som det ikke er så lett å kvantifisere i kroner, kan ikke denne optimaliseringen gjøres uten at én eller flere beslutningstagere trekkes inn. Disse vil ha som oppgave å vurdere løsningene mot hverandre for å komme frem til den mest akseptable. Dette vil bli nærmere omtalt senere.

Begrensninger

Dette ord brukes ofte om de krav som gjør at beslutningsvariablene ikke kan varieres fritt, men må holde seg innenfor visse grenser. Kravene uttrykkes i form av likheter (matematiske ligninger) eller ulikheter.

3. VEKTOR-OPTIMALISERING

Ved større inngrep f.eks. i et vassdrag, må en rekke konsekvenser utredes. Når man endrer én parameter f.eks. magasinkapasiteten, vil flomdempningen, fiskebestand og neddemt areal påvirkes.

Vi ønsker å finne frem til en analysemetodikk som på en oversiktlig måte kan fortelle oss hvordan disse størrelsene henger sammen. Det er *systemanalytikerens* oppgave å lage en slik modell og fremlegge informasjonen fra modellen på en hensiktsmessig måte. Det er imidlertid *beslutningstagernes oppgave å fatte beslutninger på grunnlag av denne informasjonen.*

Modellen skal altså være til hjelp for de ansvarlige beslutningstagerne, men ikke erstatte dem. Det er for å forstå det etterfølgende viktig å være klar over denne arbeidsdelingen. Beslutningstagerne kan være enkeltpersoner eller grupper av personer og vil for offentlige tiltak gjerne være folkevalgte.

Matematisk kan problemet formuleres slik:

$$\max \left\{ f_1\ (\overline{X}),\ f_2\ (\overline{X}),\ \ldots,\ f_n(\overline{X}) \right\}$$

under forutsetning av at følgende krav til beslutningsvariable er oppfylt:

$$g_j\ (\overline{X}) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

f_1 $(\overline{X})$, f_2 $(\overline{X})$ o.s.v. representerer altså de enkelte målsettingene med systemet. Disse kan f.eks. være elektrisitetsproduksjon i kWh, antall fisk, «rekreasjonsnytten» av området o.s.v. De enkelte funksjoner kan altså ha forskjellige benevninger. I alt har vi n slike målfunksjoner.

$\overline{X}$ er en N-dimensjonal vektor av beslutningsvariable, dvs.:

f_1 $(\overline{X})$ er bare en forkortet skrivemåte for f_1 $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N)$.

Vi har også m begrensningsbetingelser. Dette betyr at verdiene på beslutningsvariablene X_1, X_2, ---- ,X_N må være slik at betingelsene oppfylles.

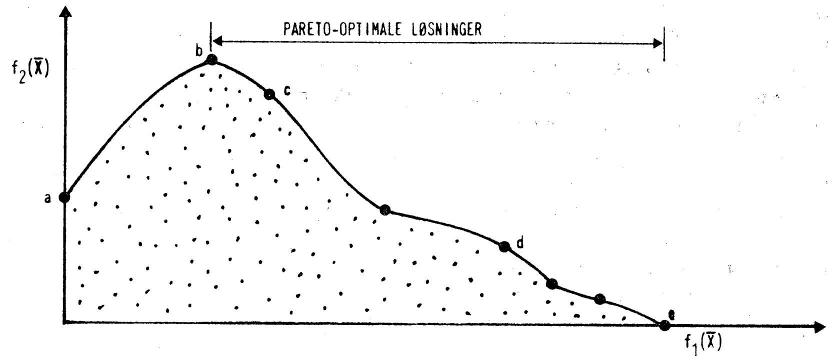
For å illustrere problemstillingen bedre, skal vi ta for oss ett eksempel hvor vi har to målsettingsfunksjoner, f_1 $(\overline{X})$ og f_2 $(\overline{X})$. Disse ønskes maksimert under hensyntagen til begrensningene

$$g_j\ (\overline{X}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Dersom vi har få beslutningsvariable, vil det være overkommelig å regne ut verdiene av f_1 $(\overline{X})$ og f_2 $(\overline{X})$ for alle kombinasjoner av beslutningsvariablene. Eller sagt på en annen måte: For hver kombinasjon av beslutningsvariable som oppfyller betingelsene, finnes en tilhørende verdi av f_1 (X) og f_2 (X). I figur 2 er disse avmerket som punkter.

Alle punktene vil bli omhyllet av en kurve a b c d e siden vi har at beslutningsvariablene skal oppfylle visse betingelser. Punktene på omhylningskurven gir den maksimale verdien av f_2 $(\overline{X})$ for en gitt verdi av f_1 $(\overline{X})$. Alle punkter som ligger innenfor a b c d e og koordinataksene tilsvarer *mulige* løsninger av problemet.

Vi ønsker imidlertid å finne frem til en løsning som kan betegnes som optimal. For dette formål vet vi at alle løsninger under omhylningskurven a b c d e vil være uinteressante. Dersom vi starter ved «a», ser vi at vi kan øke f_2 (X) når f_1 (X) øker. Dette gjelder inntil vi kommer til «b». Dersom f_1 (X) øker videre, vil f_2 (X) reduseres. Vi sier at vi langs kurven b c d e har Pareto-optimale løsninger. Dette betyr at en økning i utbytte fra én av målfunksjonene kun kan gjøres ved at utbyttet fra en annen målfunksjon reduseres. Den optimale løsningen vil fin-



Figur 2.

nes langs denne delen av omhylningskurven. Man kan nå ikke komme nærmere den optimale løsningen før man har presentert for beslutningstageren hvilken reduksjon man vil få i den ene målsettingen når den andre økes med f.eks. en enhet. Tangentens helning til kurven b c d e vil være et uttrykk for dette. Denne helningen vil være avhengig av verdien på f_1 (X). Vi kaller helningen på tangenten for γ. Siden vi så at denne verdien avhenger av f_1 (X), kan vi skrive

$$\lambda = f\left(f_1(\bar{X})\right)$$

Beslutningstageren må nå ta stilling til hvordan han vil vurdere tapet av λ énheter av målsetting nr. 2 (f_2 ($\bar{X}$)) mot én enhet økning i målsetting nr. 1.

De verdiene av f_1 (X) og f_2 (X) som gir en λ hvor beslutningstageren er indifferent (man er villig til å «ofre» λ enheter av målsetting nr. 2 for å oppnå én enhet av målsetting nr. 1) sies å tilhøre de indifferente løsningene. Hvilken av de indifferente løsningene som velges er da likegyldig.

λ kalles på engelsk i denne sammenheng for «trade-off». Vi kunne kanskje på norsk prøve med «byttekoeffisienten».

Det ovenstående eksempel var enkelt å behandle. Dersom vi imidlertid får flere enn to målsettinger og en rekke beslutningsvariable, kan man ikke lenger «håndregne» seg frem til et resultat. Man må ta i bruk mer avanserte metoder.

4. KRAV TIL METODE FOR VEKTOROPTIMALISERING

Vi kan stille opp følgende krav til metoder for å løse et vektoroptimaliseringsproblem

1) Må gi akseptabel regnetid
2) Finne de Pareto-optimale løsningene
3) Beregne byttekoeffisientene eksplisitt
4) Hensiktsmessig dialog mellom modell og beslutningstager.

I de senere år er det foreslått en rekke forskjellige metoder, men ofte er de ikke tilfredsstillende på ett eller flere av de ovenfor nevnte punkter.

I det etterfølgende vil vi bare ta for oss én metode som skulle tilfredsstille kravene for å løse problemer i forbindelse med vannressursforvaltning.

SWT-metoden

SWT står for *S*urrogate *W*orth *T*rade-off. Dette refererer til at beslutningstagerne blir bedt om å «evaluere» byttekoeffisientene. Spørsmålet til beslutningstageren kan være som følger: «Er du villig til å gi avkall på λ enheter av målsetting nr. 2 (f.eks. fisk) for å oppnå én enhet av målsetting nr. 1 (f.eks. elektrisitet)?»

I stedet for at beslutningstageren nå svarer «ja» eller «nei», kan vi tenke oss at vi har en noe mer gradert skala. Verbalt kunne dette illustreres som: ja!!, ja, tja, tnei, nei, nei!!. Det er imidlertid vanlig å benytte en skala fra + 10 til ÷ 10. Dersom beslutningstageren svarer 0, betyr det at han er indifferent. Det er nettopp de tilhørende λ-verdiene vi er interessert i, da de vil gi oss de «indifferente løsningene». SWT-metoden har tatt konsekvensen av at beslutningstageren vil sette forskjellige verdier på byttekoeffisientene avhengig av hvilket nivå de enkelte målsettingene befinner seg på. Dersom vi f.eks. har mye fisk, er det naturlig at man vil være mer villig til å gi avkall på en del av disse enn man i utgangssituasjonen hadde lite.

Vi vil i det etterfølgende meget skjematisk vise hvordan vektor-optimaliseringsproblemet omformes slik at vi finner byttekoeffisientene. For enkelhets skyld vil vi anta at beslutningsvariablene alltid holder seg innenfor visse gitt grenser, og at vi bare har tre målsettinger. Oppgavene kan da formulers slik:

$$\min \left\{ f_1(\overline{X}),\ f_2(\overline{X}),\ f_3(\overline{X}) \right\}$$

$\overline{X}$ er som tidligere en N-dimensjonal beslutningsvektor. Vi velger denne gangen et minimaliseringsproblem. (Dette kan lett omformes til et maksimeringsproblem ved å benytte de inverse funksjonene).

Hver for seg vil funksjonene ha følgende minimumsverdier:

$$f_1 = \left\{ \min \ f_1(\overline{X}) \right\}$$
$$f_2 = \left\{ \min \ f_2(\overline{X}) \right\}$$
$$f_3 = \left\{ \min \ f_3(\overline{X}) \right\}$$

Disse verdiene finnes på vanlig måte ved å minimalisere en funksjon.

Vi vil nå etter tur ta for oss én og én av målsettingsfunksjonene mens de andre målsettingsfunksjonene legges inn som begrensningskrav. Først tar vi ut den første målsettingen.

$$(1) \qquad \min \left\{ f_1(\overline{X}) \right\}$$

under forutsetning av at

$$(2) \qquad f_2(\overline{X}) \leq F_2$$

$$(3) \qquad f_3(\overline{X}) \leq F_3$$

hvor $F_2 = f_2 + \varepsilon_2$

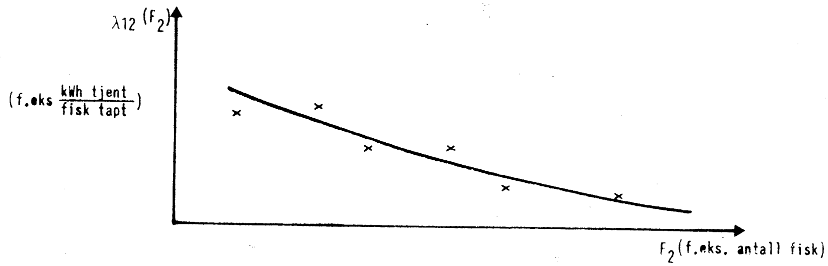
$$F_3 = f_3 + \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_2 \text{ og } \varepsilon_3 > 0$$

Vi kan nå endre begrensningskravet ved å endre ε_2 mens ε_3 er konstant.

I første omgang varierer vi ε_2 mens ε_3 er konstant.

Dersom vi nå øker ε_2 med én enhet av gangen, vil vi kunne finne hvordan minimumsverdien på f_1 (X) endrer seg avhengig av ε_2. Denne endringen er nettopp et uttrykk for λ, som var det man oppnådde i én målsetting ved å gi avkall på én enhet fra en annen målsetting på et visst nivå av denne. Dette gjelder når (2) er en bindende restriksjon. Dvs. restriksjonen er til hinder for en ytterlig forbedring av f_1 (X). Verdiene kan plottes i et akse-system.



Figur 3.

λ_{12} symboliserer byttekoeffisienten for begrensning nr. 2 når målsettingsfunksjonen er f_1 ($\overline{X}$). Vi beregner den kurve som tilnærmer punktene best.

Vi har nå oppnådd å finne hvordan byttekoeffisienten endrer seg når nivået på f_2 ($\overline{X}$) endrer seg. På tilsvarende måte kan vi finne λ_{13}. F_2 holdes da konstant mens F_3 varieres. Dette kan vi gjøre dersom nivået på (3) ikke influerer vesentlig på λ_{12} (F_2).

Deretter lar vi f_2 (X) være hovedmålsettingen og finner λ_{21} og λ_{23}. Tilslutt er f_3 hovedmålsetting og vi finner λ_{31} og λ_{32}.

Det kan imidlertid vises at

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ik} \cdot \lambda_{kj} \qquad \text{for } i \neq j$$

og at

$$\lambda_{ij} = 1/\lambda_{ji} \qquad , \lambda_{ji} \neq 0$$

slik at vi kan spare oss mye regnearbeide.

Hvis vi her for enkelthets skyld sier at nivået på den tredje målsettingen bare har ubetydelig innflytelse på byttekoeffisentene mellom de to øvrige målsettingene, kan vi si at vi har fått følgende informasjon ut av systemet:

Ved å gi avkall på én enhet på en hvilken som helst av målsettingene, kan man finne hvor mye de øvrige kan forbedres på forskjellige nivåer av disse.

Denne informasjon skal fremstilles for beslutningstageren (e) hvis oppgave det nå er å *verdsette* marginale endringer i målsettingsfunksjonene mot hverandre.

5. Avslutning

Artikkelen baserer seg på materiale fremkommet ved en litteraturstudie foretatt på delvis privat basis av undertegnede.

Den er ikke benyttet i Norge i dag. NVE's medlem av Vannressursutvalget er imidlertid orientert om metoden.

REFERANSELISTE:

1. *Haimes, Hall:* The surrogate worth trade of F method. Water Resources Research, August 1974.
2. *Cohon, Marks:* A review and Evaluation of Multiobjective programming techniques. Water Resources Research, April 1975.
3. *Haimes:* Hierarchical Analyses of water Resources Systems Mc Graw-Hill Inc., 1977.
4. *Wagner:* Principles of operations research Prentice-Hall international, Inc., London, 1975
5. *Loucks:* Planning for multiple goals Economy-Wide models and development planning. Nr. 4, 1975.